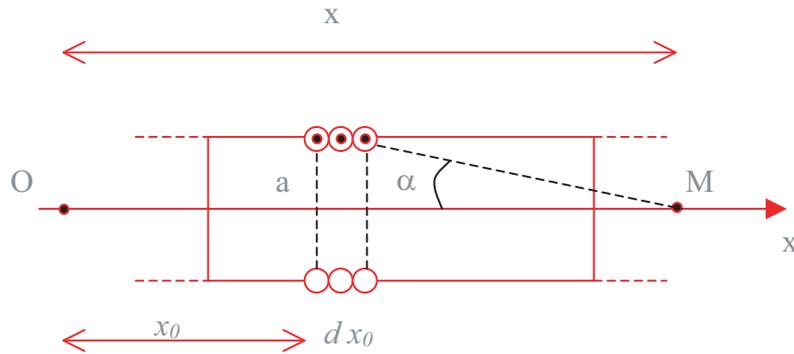


Résonance magnétique nucléaire -RMN-

**1^{ère} partie :
Champ magnétique tournant**

1.1

1.1.1 la tranche du solénoïde $[x_0, x_0 + dx_0]$ est assimilée à une spire de courant $dI = ndx_0 I_1$ et crée un champ élémentaire $d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 n I_1 dx_0}{2a} \sin^3 \alpha \vec{u}_x$ or $\cotan \alpha = \frac{x-x_0}{a} \implies dx_0 = a \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha}$



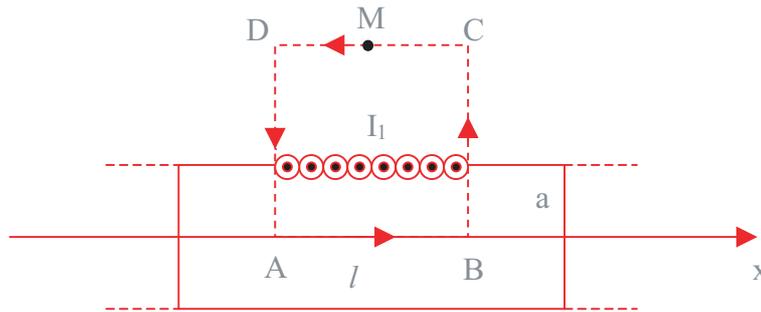
soit $\vec{B}_1(x, 0, 0) = \int_0^\pi \frac{\mu_0 n I_1}{2a} \sin^3 \alpha \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha} \vec{u}_x = \mu_0 n I_1 \vec{u}_x$

1.1.2 le plan $\Pi \equiv (M, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie des courants donc $\vec{B}_1(M) \perp \Pi$

soit $\vec{B}_1(M) = B_1(M) \vec{u}_x$

1.1.3 le solénoïde infini est invariant par translation et par rotation suivant Ox donc $B_1(M) = B_1(r)$

1.1.4 on a : $\vec{B}_1 = B_1(r) \vec{u}_x$ soit le théorème d'Ampère $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{enlacs}$ or



on a :

$$\oint_{\Gamma} B(r)\vec{u}_x \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B B_1(0)\vec{u}_x \cdot d\ell\vec{u}_x + \int_B^C B_1(r)d\ell \underbrace{\vec{u}_x \cdot \vec{u}_r}_{=0} + \int_C^D B_1(r)\vec{u}_x \cdot d\ell(-\vec{u}_x) + \int_D^A B_1(r)d\ell \underbrace{\vec{u}_x \cdot (-\vec{u}_r)}_{=0}$$

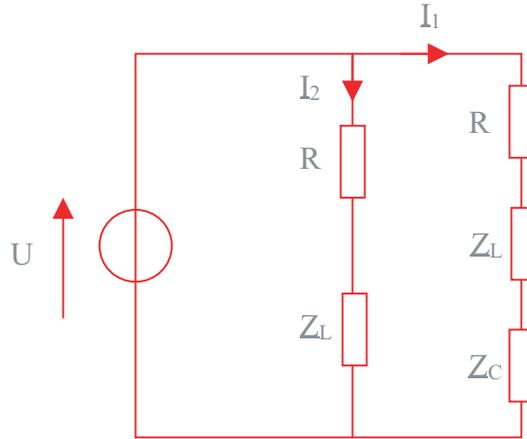
$$\text{donc : } \oint_{\Gamma} \vec{B}_1 \cdot d\vec{\ell} = [\mu_0 n I_1 \vec{u}_x - B_1(r)]\ell = \begin{cases} 0 & r < a \\ +\mu_0 n \ell I_1 & r > a \end{cases}$$

$$\text{soit } \vec{B}_1 = \begin{cases} \mu_0 n I_1 \vec{u}_x & r < a \\ \vec{0} & r > a \end{cases} \text{ donc } k = \mu_0 n$$

$$1.1.5 \quad \Lambda = \frac{\Phi_{propre}}{\ell I_1} = \frac{(n\ell)(\mu_0 n I_1)(\pi a^2)}{\ell I_1} = \mu_0 n^2 \pi a^2$$

1.2

1.2.1 schéma équivalent en régime sinusoïdal



on adopte la notation complexe $x(t) = X\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{4}) \leftrightarrow \underline{x}(t) = \underline{X}\sqrt{2} \exp j(\omega t - \frac{\pi}{4})$ alors

$$\underline{I}_1 = \frac{U}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = |\underline{I}_1| = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} \\ \varphi_1 = \arg \underline{I}_1 = \arg \frac{U}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})} = -\arctan \frac{(L\omega - \frac{1}{C\omega})}{R} \end{cases}$$

1.2.2 de même

$$\underline{I}_2 = \frac{U}{R + jL\omega} \Rightarrow \begin{cases} I_2 = |\underline{I}_2| = \frac{U}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \\ \varphi_2 = \arg \underline{I}_2 = \arg \frac{U}{R + jL\omega} = -\arctan \frac{L\omega}{R} \end{cases}$$

$$1.2.3 \quad \varphi_1 = -\varphi_2 \iff (\frac{1}{C\omega} - L\omega) = L\omega > 0 \quad (*)$$

$$1.2.4 \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \implies \tan \varphi_1 \tan \varphi_2 = -1 \implies L\omega(\frac{1}{C\omega} - L\omega) = R^2 \quad (**)$$

1.2.5 dans le cas où les deux conditions sont satisfaites , par remplacement , on aura :

$$L\omega = (\frac{1}{C\omega} - L\omega) = R \text{ soit : } I_1 = I_2 = \frac{U}{R\sqrt{2}}$$

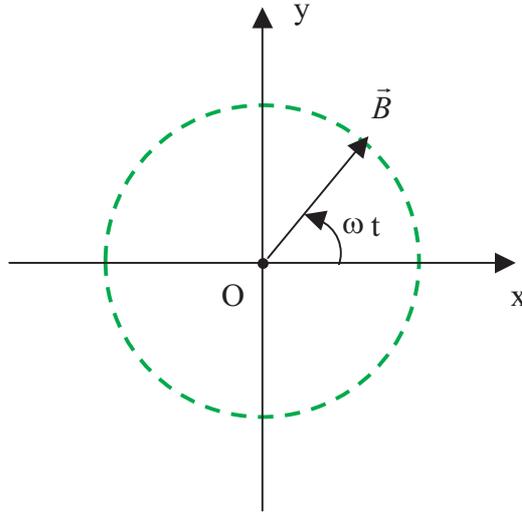
$$\text{remarque : } \varphi_1 = -\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$$

1.2.6 en effet les équations de Maxwell en ARQP s'écrivent : $\text{rot} \vec{B} \approx \mu_0 \vec{j}$ et $\text{div} \vec{B} = 0$ ont la même forme qu'en régime permanent donc le thm d'ampère reste valable sous la forme de 1.1.4

$$1.2.6.1 \quad \vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \mu_0 n i_1(t) \vec{u}_x + \mu_0 n i_2(t) \vec{u}_y = \frac{\mu_0 n U}{R\sqrt{2}} \sqrt{2} [\cos(\omega t) \vec{u}_x + \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \vec{u}_y]$$

$$\text{soit } \vec{B} = \frac{\mu_0 n U}{R} [\cos(\omega t) \vec{u}_x + \sin(\omega t) \vec{u}_y]$$

1.2.6.2 :



$B = \frac{\mu_0 n U}{R}$ tournant dans le plan xOy à la vitesse angulaire ω dans le sens trigonométrique

1.2.6.3 $I_1 = I_2 = 7 \text{ mA}$ $L = \frac{R}{\omega} = 0.32 \text{ mH}$ $C = \frac{1}{2R\omega} = 400 \text{ nF}$ $B = 1.25 \cdot 10^{-5} \text{ T}$

1.2.7 le condensateur crée un déphasage entre $i_1(t)$ et $i_2(t)$

1.2.8 brancher C en série avec le solénoïde S_2 dans ce cas $\vec{B} = \frac{\mu_0 n U}{R} [\cos(\omega t) \vec{u}_y + \sin(\omega t) \vec{u}_x]$

2^{ème} partie : Théorie élémentaire de la RMN

2.1

2.1.1 TMC en O dans le Réf Galiléen $\frac{d\vec{m}}{dt} = \vec{m} \times \vec{B}$ soit $\left| \frac{d\vec{m}}{dt} = \gamma \vec{m} \times B \vec{u}_z \right.$

2.1.2 on a $\vec{m} \cdot \frac{d\vec{m}}{dt} = \vec{m} \cdot (\gamma \vec{m} \times \vec{B}) = 0 \iff \frac{1}{2} \frac{d\vec{m}^2}{dt} = 0 \implies \|\vec{m}\| = cte$

de même $\frac{dm_z}{dt} = \vec{u}_z \cdot \frac{d\vec{m}}{dt} = 0 \implies m_z = cte'$

2.1.3 $\cos(\vec{m}, \vec{B}_0) = \frac{\vec{m} \cdot \vec{B}_0}{m B_0} = \frac{m_z}{m} = \text{constante}$

2.1.4 on a
$$\begin{cases} \dot{m}_x \\ \dot{m}_y \\ \dot{m}_z \end{cases} = \begin{cases} \gamma m_y B_0 & (1) \\ -\gamma m_x B_0 & (2) \\ 0 \end{cases}$$

$(1) + i(2) \implies \dot{\underline{m}} + i\gamma B_0 \underline{m} = 0$

donc $\underline{m}(t) = \underline{m}(0) \exp -i\gamma B_0 t = (m_0 + i0) \exp -i\gamma B_0 t = m_0 \exp -i\gamma B_0 t$

soit $\left| \begin{matrix} m_x(t) = \Re(\underline{m}) = m_0 \cos \gamma B_0 t \\ m_y(t) = \Im(\underline{m}) = -m_0 \sin \gamma B_0 t \end{matrix} \right.$

2.1.5 on a $\vec{m}(t) = \begin{pmatrix} m_0 \cos \gamma B_0 t \\ -m_0 \sin \gamma B_0 t \\ m_{z0} \end{pmatrix}$ soit $|\omega_0| = \gamma B_0$ de plus d'après les données on écrit

$\left. \frac{d\vec{m}}{dt} \right|_R = -\gamma \vec{B}_0 \times \vec{m} = \vec{\omega}_0 \times \vec{B}$

2.1.6 $\omega_0 = -\gamma B_0 = -2.7 \cdot 10^8 \text{ Hz}$ et $f_0 = \frac{|\omega_0|}{2\pi} = 0.43 \cdot 10^8 \text{ Hz}$ ondes Hertiennes

2.2

2.2.1 $\left. \frac{d\vec{m}}{dt} \right|_R = -\gamma (\vec{B}_0 + \vec{B}_1) \times \vec{m} = (\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1) \times \vec{m}$

2.2.2 $\left. \frac{d\vec{m}}{dt} \right|_{R_1} = \left. \frac{d\vec{m}}{dt} \right|_R - \vec{\omega} \times \vec{m} = (\vec{\omega}_1 - \vec{\Omega}) \times \vec{m}$

2.2.3 c'est un mouvement de précession à la vitesse de rotation $\vec{\omega}_1 - \vec{\Omega} = -\gamma B_1 \vec{u}_X - \gamma B_0 \vec{u}_z - \omega \vec{u}_z$

on a $\vec{u}_X \perp \vec{u}_z$ donc $\cos \theta = \frac{(\vec{\omega}_1 - \vec{\Omega}) \cdot \vec{u}_z}{|\vec{\omega}_1 - \vec{\Omega}|} = -\frac{\gamma B_0 + \omega}{\sqrt{(\gamma B_1)^2 + (\gamma B_0 + \omega)^2}}$

2.2.4 $\vec{\omega}_1 - \vec{\Omega}$ est fixe dans R_1 effectue donc un mouvement de rotation autour de Oz à la vitesse de rotation $\vec{\omega}$

le mouvement de \vec{m} dans R sera composé de précession et rotation

2.2.5

2.2.5.1 si $\vec{\Omega} = \vec{0}$ on aura $\frac{d\vec{m}}{dt}|_{R_1} = \omega_1 \vec{u}_X \times \vec{m}$

\vec{m}_z subit son premier retournement ($\vec{m}_z \rightarrow -\vec{m}_z$) à la demi-période de rotation

$$\Delta t = \frac{\pi}{|\omega_1|} = \frac{\pi}{\gamma B_1}$$

2.2.5.2 A.N : $\Delta t = 11.6 \text{ ms}$

2.3 Prise en compte de la relaxation

2.3.1 Relaxation d'un moment magnétique

2.3.1.1 τ est un temps

2.3.1.2 En présence du champ magnétique à $t \geq t_0$: $\frac{d\vec{M}}{dt} + \frac{\vec{M}}{\tau} = \frac{\vec{M}_0}{\tau} \implies \vec{M} = \vec{A} \exp(-t/\tau) + \vec{M}_0$ or $\vec{M}(t_0) = \vec{0}$ donc :

$$\vec{M}(t) = \vec{M}_0 [1 - \exp(-\frac{t-t_0}{\tau})]$$

Rqe : En absence du champ magnétique , on aura :

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -\frac{\vec{M}}{\tau} \implies \frac{d\vec{M}}{dt} + \frac{\vec{M}}{\tau} = \vec{0} \implies \vec{M}(t) = \vec{M}_0 \exp -\frac{t-t_0}{\tau}$$

2.3.2 Équation de Bloch

2.3.2.1 $\frac{d\vec{M}}{dt}|_{R_1} = (\vec{\omega}_1 - \vec{\Omega}) \times \vec{M} - \frac{\vec{M} - \vec{M}_0}{\tau}$

2.3.2.2 soit
$$\begin{vmatrix} \dot{M}_X \\ \dot{M}_Y \\ \dot{M}_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega_1 \\ 0 \\ -\Omega \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} M_X \\ M_Y \\ M_z \end{vmatrix} - \frac{1}{\tau} \begin{vmatrix} M_X \\ M_Y \\ M_z - M_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{M_X}{\tau} + \Omega M_Y \\ -\Omega M_X - \frac{M_Y}{\tau} - \omega_1 M_z \\ \omega_1 M_Y - \frac{M_z - M_0}{\tau} \end{vmatrix}$$

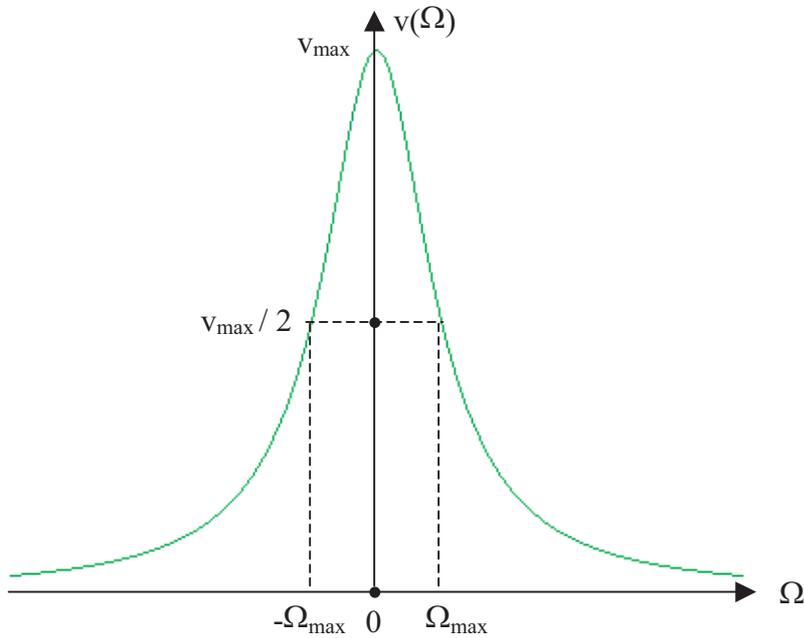
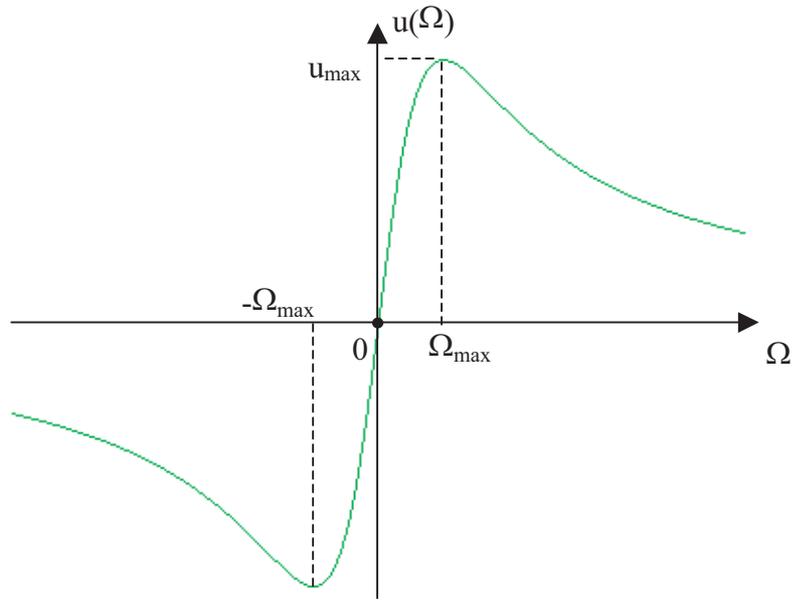
soit
$$\begin{cases} \dot{u} = -\frac{u}{\tau} + \Omega v \\ \dot{v} = -\Omega u - \frac{v}{\tau} - \omega_1 \frac{M_z}{M_0} \\ \dot{M}_z = \omega_1 v M_0 - \frac{M_z - M_0}{\tau} \end{cases}$$

2.3.3

2.3.3.1 En régime établi
$$\begin{cases} 0 = -\frac{u}{\tau} + \Omega v \\ 0 = -\Omega u - \frac{v}{\tau} - \omega_1 \frac{M_z}{M_0} \\ 0 = \omega_1 v M_0 - \frac{M_z - M_0}{\tau} \end{cases} \implies \begin{cases} 0 = -u + \tau \Omega v \\ \tau \omega_1 = -\tau \Omega u - v(1 + \tau^2 \omega_1^2) \\ M_z = M_0(1 + \tau \omega_1 v) \end{cases}$$

soit
$$\begin{cases} u = \frac{-\tau^2 \omega_1 \Omega}{1 + (\tau \omega_1)^2 + (\tau \Omega)^2} \\ v = \frac{-\tau \omega_1}{1 + (\tau \omega_1)^2 + (\tau \Omega)^2} \\ M_z = M_0 - M_0 \frac{-(\tau \omega_1)^2}{1 + (\tau \omega_1)^2 + (\tau \Omega)^2} \end{cases}$$

2.3.3.2 avec $\omega_1 < 0$ on aura $\Omega_{max} = \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \omega_1^2}$ et $u_{max} = \frac{-\omega_1}{2\sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \omega_1^2}}$ enfin $v_{max} = \frac{-\tau \omega_1}{1 + (\tau \omega_1)^2}$



$$2.3.3.3 \quad v(\Omega) = \frac{v_{max}}{2} \iff \frac{-\tau\omega_1}{1+(\tau\omega_1)^2+(\tau\Omega)^2} = \frac{-\tau\omega_1}{2+2(\tau\omega_1)^2} \implies \Omega = \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \omega_1^2} = \Omega_{max} \implies \Delta\Omega = 2\Omega_{max}$$

2.3.4

$$2.3.4.1 \quad \vec{B}_2 = 2B_1 \cos \omega' t \vec{u}_x = \begin{vmatrix} B_1 \cos \omega' t & \vec{u}_x \\ B_1 \sin \omega' t & \vec{u}_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_1 \cos \omega' t & \vec{u}_x \\ -B_1 \sin \omega' t & \vec{u}_y \end{vmatrix} = \vec{B}_2^+ + \vec{B}_2^- \quad (\text{resp})$$

2.3.4.2 à la résonance $\vec{\Omega} = \vec{\omega}_\pm' - \vec{\omega}_0 = \vec{0}$ soit $\vec{\omega}_\pm' = -\gamma B_0 \vec{u}_z$ donc seul la composante \vec{B}_2^- permet d'atteindre la résonance, le vecteur rotation de cette composante est $-\omega' \vec{u}_z$

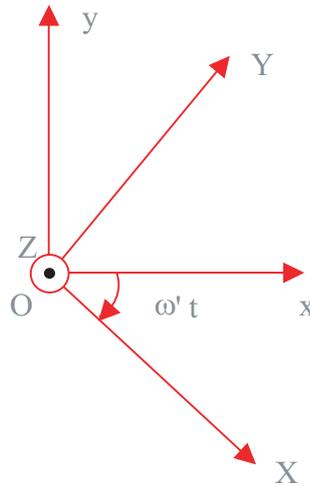
2.3.4.3 notons $\Omega_+ = \omega'_+ - \omega_0 = \omega' + \gamma B_0$

l'effet de la composante \vec{B}_2^+ sur \vec{M} sera quantifié par $u(\Omega_+)$ et $v(\Omega_+)$ dans les expressions 2.3.3.1

2.4 Détection de la réponse du milieu

2.4.1 car les flux de $\vec{B}_2 = B_2(t) \vec{u}_x$ et de $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$ sont nuls à travers la surface $\vec{S} = S \vec{u}_y$ de la bobine plate

2.4.2 loi de faraday $e(t) = -\frac{d\phi}{dt} = -NSK\frac{dM_y}{dt}$ or $M_y = (M_X\vec{u}_X + M_Y\vec{u}_Y + M_z\vec{u}_z) \cdot \vec{u}_y$
 or d'après 2.3.4.3 on ne considère que la composante \vec{B}_2^- avec $-\omega'\vec{u}_z$



donc $M_y = -uM_0 \sin \omega't + vM_0 \cos \omega't \implies e(t) = NSKuM_0 \cos \omega't + NSKvM_0 \sin \omega't$
 soit $V_0 = NSKuM_0$ et $V_{\frac{\pi}{2}} = NSKvM_0$

2.4.3 il faut tracer la loi affine $\frac{V_0}{V_{\frac{\pi}{2}}} = \tau\Omega = \tau(-\omega' + \gamma B_0)$ en fonction de ω' de pente $-\tau$

3^{ème} partie :

Détection synchrone du signal

3.1 Schéma de principe d'un détecteur synchrone

3.1.1 K_0 est en Volt

3.1.2 $V_{MUL}(t) = \frac{1}{K_0}v_{DEP}(t)e(t) = \frac{1}{K_0}V \cos(\omega't + \Delta\varphi)[V_0 \cos \omega't + V_{\frac{\pi}{2}} \sin \omega't]$

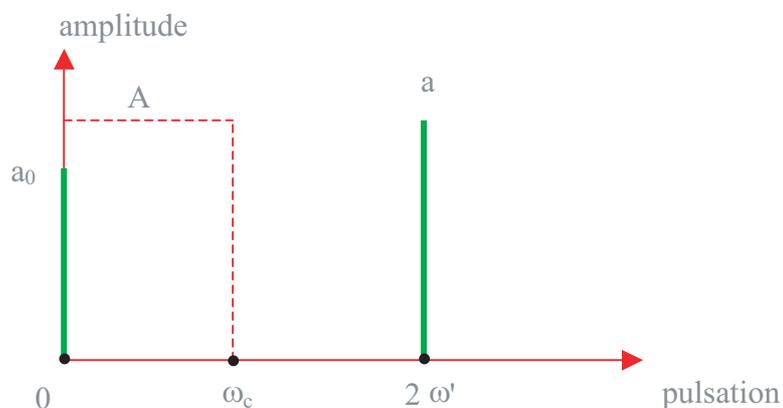
3.1.3 par trigonométrie (voir données), il vient

$$V_{MUL}(t) = \frac{V}{2K_0} \underbrace{[V_0 \cos(\Delta\varphi) - V_{\frac{\pi}{2}} \sin(\Delta\varphi) + V_0 \cos(2\omega't + \Delta\varphi) + V_{\frac{\pi}{2}} \sin(2\omega't + \Delta\varphi)]}$$

le spectre contient deux composantes :

composante continue de pulsation $\omega = 0$ avec l'amplitude $a_0 = \frac{V}{2K_0}[V_0 \cos(\Delta\varphi) - V_{\frac{\pi}{2}} \sin(\Delta\varphi)]$

composante variable de pulsation $\omega = 2\omega'$ avec l'amplitude $a = \frac{V}{2K_0}\sqrt{V_0^2 + V_{\frac{\pi}{2}}^2}$



3.1.4 le filtre passe-bas élimine la composante variable donc :

$$v_{FPB}(t) = A \frac{V}{2K_0} [V_0 \cos(\Delta\varphi) - V_{\frac{\pi}{2}} \sin(\Delta\varphi)]$$

3.1.5 si $\Delta\varphi = 0$ alors $v_{FPB}(t) = A \frac{VV_0}{2K_0}$

si $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ alors $v_{FPB}(t) = -A \frac{VV_{\frac{\pi}{2}}}{2K_0}$

3.2 Étude du circuit déphaseur

3.2.1 En régime linéaire $\varepsilon = \underline{v}^+ - \underline{v}^- = 0$

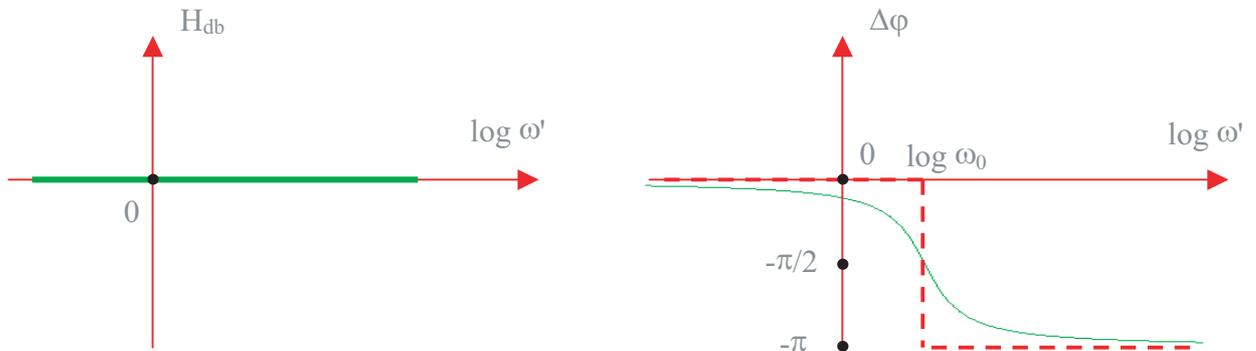
or par le théorème de Millmann : $\underline{v}^- = \frac{\frac{v_{ref}}{r} + \frac{v_{dep}}{r}}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r}} = \frac{v_{ref} + v_{dep}}{2}$ et $\underline{v}^+ = \frac{\frac{v_{ref}}{R} + \frac{0}{Z_c}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{Z_c}} = \frac{v_{ref}}{1 + jRC\omega'}$

soit $\underline{H}(j\omega') = \frac{v_{dep}}{v_{ref}} = \frac{1 - jRC\omega'}{1 + jRC\omega'}$

3.2.2 $H(\omega') = |\underline{H}(j\omega')| = 1$

et $\Delta\varphi = \text{Arg}\underline{H}(j\omega') = \text{Arg}(1 - jRC\omega') - \text{Arg}(1 + jRC\omega') = -2\text{Arctan}[RC\omega']$

3.2.3 on note $\omega_0 = \frac{1}{RC}$



le circuit est passe-tout déphaseur

3.2.4 $\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2}$ si $\omega' = \omega_0 = \frac{1}{RC}$ d'où $R = \frac{1}{\omega'C} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^4 \cdot 10 \cdot 10^{-9}} \Omega = 1.6 \text{ k}\Omega$

dans ce cas d'après 3.1.4 on aura $v_{FPB}(t) = A \frac{VV_{\frac{\pi}{2}}}{2K_0}$

3.2.5 il suffit de réaliser $\Delta\varphi = 0$ en prenant $R = 0$ ou de relier directement, sans déphaseur, $v_{ref}(t)$ à l'entrée x_1 du multiplieur.

fin du corrigé